$[a,b]$ のコンパクト性

Theorem. 閉区間 $[a,b]$ $(a,b\in\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ の通常の位相に関してコンパクトである.

Proof. $\mathfrak{C}$ を $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a,b]$ の任意の開被覆とする. もし, $[a,b]$ がコンパクトでないとすると

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$$

の少なくともどちらか一方は $\mathfrak{C}$ に属する有限個の開集合によって被覆できない. それを $[a_1,b_1]$ とする. さらに

$$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right],\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$$

の少なくともどちらか一方は $\mathfrak{C}$ に属する有限個の開集合によって被覆できない. それを $[a_2,b_2]$ とする.

同様にして, $\mathfrak{C}$ に属する有限個の開集合によって被覆できない閉区間列

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

を構成することができる. ただし, 2 つの閉区間とも有限個の開集合によって被覆できない場合は a_n を含む方を $[a_{n+1},b_{n+1}]$ とする. このとき, $[a_n,b_n]$ の区間幅は $b_n-a_n=2^{-n}(b-a)\to 0$ $(n\to\infty)$ となるから, Cantor の区間縮小定理より $c\in[a_n,b_n]$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ となる $c\in\mathbb{R}$ がただ 1 つに定まる.

$\mathfrak{C}$ は $[a,b]$ を被覆しているから, c を含むある開集合 $O\in\mathfrak{C}$ が存在する. O は開集合であるから, ある $\varepsilon>0$ に対して $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\subset O$ となる. また, $a_n,b_n\to c$ $(n\to\infty)$ であるから, $[a_N,b_N]\subset(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ となる十分大きな $N\in\mathbb{N}$ が存在する.

しかし, $[a_n,b_n]$ の構成の仕方からこれは矛盾である. よって, $[a,b]$ はコンパクトである. ■